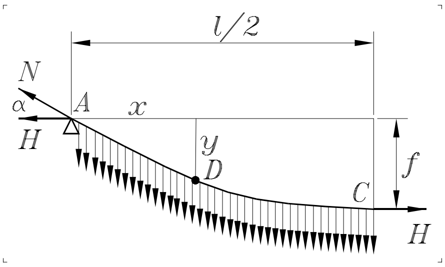
XXXV OLIMPIADA WIEDZY TECHNICZNEJ

Zawody III stopnia

Rozwiązania zadań dla grupy mechaniczno-budowlanej

Rozwiązanie zadania 1



Rys.2

Tzw. mały zwis, a więc $\cos\alpha \approx 1$. W związku z tym można przyjąć, że

$$N = H \qquad (N\,\cos\alpha = N)\,. \tag{1}$$

Równanie równowagi względem punktu D ma postać (rys.2)

$$H\,y = \frac{q\,x^2}{2}\,, \tag{2}$$

$$y = \frac{q\,x^2}{2\,H}\,. \tag{3}$$

Linia tzw. małego zwisu jest parabolą.

Wartość siły H, która może być utożsamiana z siłą naciągu kabla, jest równa: z (3) przy $x = l/2$, $y = f$, a więc:

$$H = \frac{q\,l^2}{8\,f}\,. \tag{4}$$

Długość kabla w temperaturze t_1 jest zgodnie ze wzorem podanym w treści zadania, równa:

$$s_1 = l \left(1 + \frac{8}{3} \cdot \frac{f_1^2}{l^2} \right) . \tag{5}$$

Gdy temperatura ulegnie zmianie z t_1 na t_2, długość kabla ulegnie zmianie wskutek rozszerzalności liniowej i zmiany naciągu z H_1 na H_2.

Długość kabla w temperaturze t_2 będzie więc równa:

$$s_2 = s_1 + \alpha_t \left(t_2 - t_1 \right) l + \frac{\left(H_2 - H_1 \right) l}{A\, E} , \tag{6}$$

przy czym:

$$H_1 = \frac{q\, l^2}{8\, f_1} ; \qquad H_2 = \frac{q\, l^2}{8\, f_2} ; \qquad s_2 = l \left(1 + \frac{8}{3} \cdot \frac{f_2^2}{l^2} \right) . \tag{7}$$

Wstawiając dane liczbowe otrzymujemy:

$$s_1 = 80 \cdot \left(1 + \frac{8}{3} \cdot \frac{f_1^2}{80^2} \right) = 80 + 0,0333 \cdot f_1^2 \ \mathrm{m},$$

$$s_2 = 80 \cdot \left(1 + \frac{8}{3} \cdot \frac{1,0^2}{80^2} \right) = 80,0333 \, \mathrm{m},$$

$$\alpha_t \left(t_2 - t_1 \right) l = 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot [30 - (-10)] \cdot 80 = 0,0384 \, \mathrm{m}.$$

$$H_1 = \frac{q\, l^2}{8\, f_1} = \frac{13 \cdot 80^2}{8 \cdot f_1} = 10400 \cdot \frac{1}{f_1} \, \mathrm{N},$$

$$H_2 = \frac{q\, l^2}{8\, f_2} = \frac{13 \cdot 80^2}{8 \cdot 1,0} = 10400 \, \mathrm{N}.$$

$$\frac{\left(H_2 - H_1\right)\, l}{A\, E} = \frac{\left(10400 - 10400 \cdot \dfrac{1}{f_1}\right) \cdot 80}{150 \cdot 10^{-6} \cdot 210 \cdot 10^9} = 0,0264 - 0,0264 \cdot \frac{1}{f_1}\ \mathrm{m}.$$

Wstawiając do równania (6) te wyliczone wartości, mamy:

$$80,0333 = 80 + 0,0333 \cdot f_1^2 + 0,0384 + 0,0264 - 0,264 \cdot \frac{1}{f_1}\,,$$

$$f_1^3 + 0,946 \cdot f_1 - 0,792 = 0\,.$$

Po rozwiązaniu: $f_1 = 0,6045\ \mathrm{m} = 604,5\ \mathrm{mm}$.

Zwis kabla w temperaturze $t_1 = -10°\mathrm{C}$ powinien być równy $f_1 = 0,6045\ \mathrm{m} = 604,5\ \mathrm{mm}$, aby w temperaturze $t_2 = +30°\mathrm{C}$ nie był większy od $f_2 = 1,00\ \mathrm{m} = 1000\ \mathrm{mm}$.

Rozwiązanie zadania 2

Rysunek 2 przedstawia przekrój układu w płaszczyźnie $z-w$ ze schematycznie wrysowanymi położeniami kul dla przypadku kuli pojedynczej (jej środek w punkcie O) i dla przypadku trzech kul (jedna z nich zaznaczona, o środku w punkcie O_1). Widoczny na górnym rysunku trójkąt prostokątny ABO_1 ma następujące boki:

$$AO_1 = R - r\,; \qquad BO_1 = h\,; \qquad AB = R - r - \left(p_2 - p_1\right)\,,$$

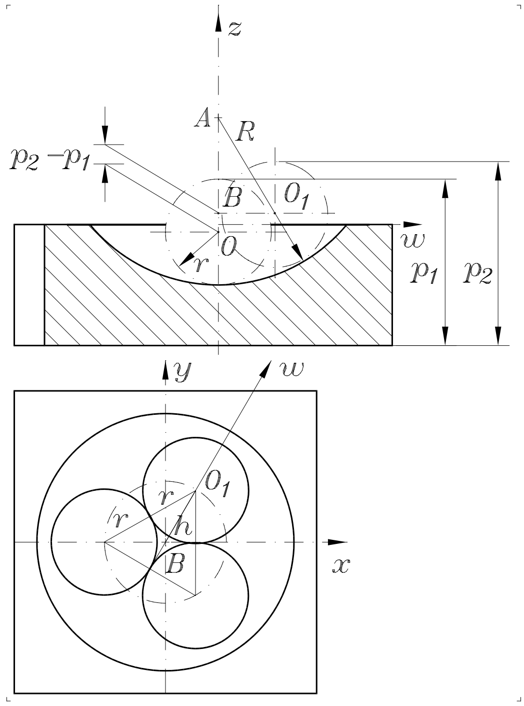
i stąd:

$$(R - r)^2 = h^2 + \left[R - r - \left(p_2 - p_1\right)\right]^2\,, \tag{1}$$

gdzie h – jak to wynika z dolnego rysunku – stanowi 2/3 wysokości trójkąta równobocznego o boku $2\,r$ i stąd wynosi: $h = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3}\, r$.

Z równania (1) promień sfery wynosi:

$$R = \frac{\left(p_2 - p_1\right)^2 + \frac{4}{3}\, r^2}{2\left(p_2 - p_1\right)} + r\,.$$



Rysunek 2

Wartość nominalna promienia R_{nom}

$$R_{nom} = \frac{(42-40)^2 + \frac{4}{3}\cdot 10^2}{2\cdot(42-40)} + 10 = 44,333 \text{ mm}.$$

Niedokładność pomiaru $\Delta R = R_{max} - R_{min}$

W celu ustalenia wartości R_{max} i R_{min} należy określić które wymiary zwiększają, a które zmniejszają promień R. Można to wykonać na dwa sposoby.

1. Wykorzystanie znaku pochodnej cząstkowej

$$\left(\frac{\partial R}{\partial p_1}\right)_{r,p_2} = \frac{2\,r^2}{3\left(p_2 - p_1\right)} - \frac{1}{2} = \frac{2\cdot 10^2}{3\cdot(42-40)} - \frac{1}{2} = 32,8 \;>\; 0\,,$$

$$\left(\frac{\partial R}{\partial p_2}\right)_{r,p_1} = \frac{1}{2} - \frac{2\,r^2}{3\left(p_2 - p_1\right)} = \frac{1}{2} - \frac{2\cdot 10^2}{3\cdot(42-40)} = -32,8 \;<\; 0\,,$$

$$\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)_{p_1, p_2} = \frac{4\, r}{3\left(p_2 - p_1\right)} + 1 = \frac{4 \cdot 10}{3 \cdot (42 - 40)} + 1 = 7,7 \ > \ 0\,.$$

Z powyższego wynika, że $f\left(r, p_1, p_2\right)$ jest rosnącą funkcją p_1 i r oraz malejącą funkcją p_2.

2. Wykorzystanie tabeli badania funkcji $R = f\left(r, p_1, p_2\right)$ wstawiając do niej kolejno wartości większe od nominalnych.

$p_1 = 40,005$	$p_1 > p_{1nom}$	$R = 44,414$	$R > R_{nom}$	funkcja rosnąca
$p_2 = 42,005$	$p_2 > p_{2nom}$	$R = 44,254$	$R < R_{nom}$	funkcja malejąca
$r = 10,01$	$r > r_{nom}$	$R = 44,410$	$R > R_{nom}$	funkcja rosnąca

Z powyższej analizy wynika, że:

$$R_{\max} = \frac{\left(p_{2_{\min}} - p_{1_{\max}}\right)^2 + \frac{4}{3}\, r_{\max}^2}{2\left(p_{2_{\min}} - p_{1_{\max}}\right)} + r_{\max} =$$

$$= \frac{(41,995 - 40,005)^2 + \frac{4}{3} \cdot 10^2}{2 \cdot (41,995 - 40,005)} + 10 = 44,496\,,$$

$$R_{\min} = \frac{\left(p_{2_{\max}} - p_{1_{\min}}\right)^2 + \frac{4}{3}\, r_{\min}^2}{2\left(p_{2_{\max}} - p_{1_{\min}}\right)} + r_{\max} =$$

$$= \frac{(42,005 - 39,995)^2 + \frac{4}{3} \cdot 9,99^2}{2 \cdot (42,005 - 39,995)} + 9,99 = 44,096\,.$$

stąd:

$$\Delta\, R = R_{\max} - R_{\min} = 44,496 - 44,096 = 0,4\,.$$

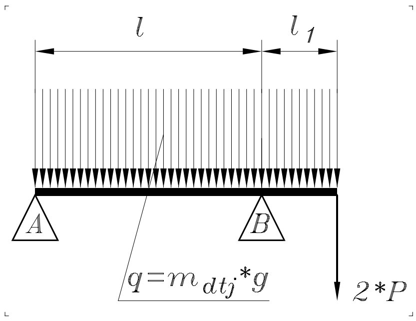
Odchyłki promienia

$$r_2 = R_{\max} - R_{nom} = 44,496 - 44,333 = +0,163 ,$$
$$r_1 = R_{\min} - R_{nom} = 44,096 - 44,333 = -0,237 .$$

Odpowiedź

$$R = 44,333 \begin{matrix} +\,0,163 \\ -\,0,237 \end{matrix} \qquad \text{lub} \qquad R = 44 \begin{matrix} +\,0,496 \\ +\,0,096 \end{matrix}$$

Rozwiązanie zadania 3



Ad.1 Z warunków podanych w treści zadania wynika, że reakcja na podporze A równa jest 0. Jedynymi siłami w układzie są rozłożony ciężar belki oraz siła ciężaru i bezwładności masy m działająca w obu częściach liny.
(rysunek obok)

$$q = m_{dtj}\, g , \tag{1}$$

$$P = m\,(g + a) . \tag{2}$$

Równanie momentów względem punktu B:

$$\frac{q\,l^2}{2} = \frac{q\,l_1^2}{2} + 2\,P\,l_1 . \tag{3}$$

z równania (1) i (3):

$$P = \frac{m_{dtj}\,g}{4\,l_1}\left(l^2 - l_1^2\right) , \tag{4}$$

następnie z równań (2) i (4):

$$a = \left[\frac{m_{dtj}}{4\,l_1\,m}\left(l^2 - l_1^2\right) - 1\right] g , \tag{5}$$

$$a = \left[\frac{5,94}{4 \cdot 1 \cdot 20} \cdot \left(4^2 - 1^2 \right) - 1 \right] \cdot 9,81 = 1,12\,\mathrm{m/s}^2$$

Ad.2 Moc silnika wynosi:

$$N = P\,v\,. \tag{6}$$

Ponieważ masa porusza się z przyspieszeniem „a” jego prędkość na wysokości „h” wynosi:

$$v = \sqrt{2\,a\,h}\,, \tag{7}$$

a maksymalna niezbędna moc wyniesie:

$$N = m\,(a + g)\,\sqrt{2\,a\,h}\,, \tag{8}$$

$$N = 20 \cdot (1,12 + 9,81) \cdot \sqrt{2 \cdot 1,12 \cdot 10} = 1035\,\mathrm{W}.$$

Ad.3 W tym wypadku belka jest obciążona jej rozłożonym ciężarem oraz siłą ciężaru masy m w obu częściach liny.

Moment sił na podporze B wynosi:

$$M_B = \frac{q\,l_1^2}{2} + 2\,P_1\,, \tag{9}$$

gdzie:

$$P_1 = m_{\max}\,g\,, \tag{10}$$

warunek wytrzymałości na zginanie:

$$M_B < k_g\,W_x\,. \tag{11}$$

Z trzech ostatnich zależności oraz z (2) wynika, że:

$$\frac{m_{dtj}\,g\,l_1^2}{2} + 2\,m_{\max}\,g < k_g\,W_x\,,$$

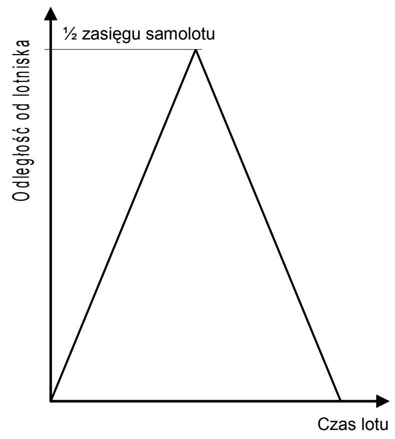
$$m_{\max} < \frac{k_g\,W_x}{2\,g} - \frac{m_{dtj}\,l_1^2}{4}\,, \tag{12}$$

$$m_{\max} < \frac{115 \cdot 10^{6} \cdot 19,3 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 9,81} - \frac{5,94 \cdot 1^{2}}{4} = 112 \text{ kg}.$$

Odpowiedź

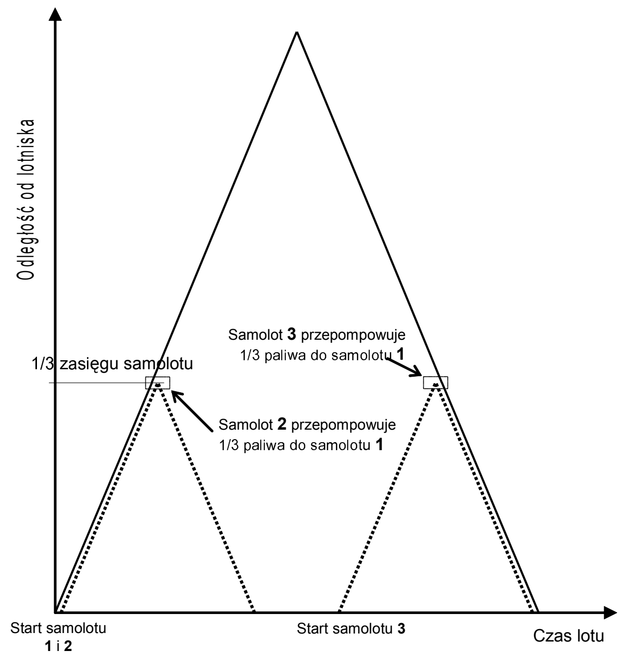
1. maksymalne przyspieszenie wynosi $1,12$ m/s^2.
2. minimalna moc wynosi 1035 W.
3. maksymalna masa wynosi 112 kg.

Przykładowe rozwiązanie problemu technicznego (schemat)



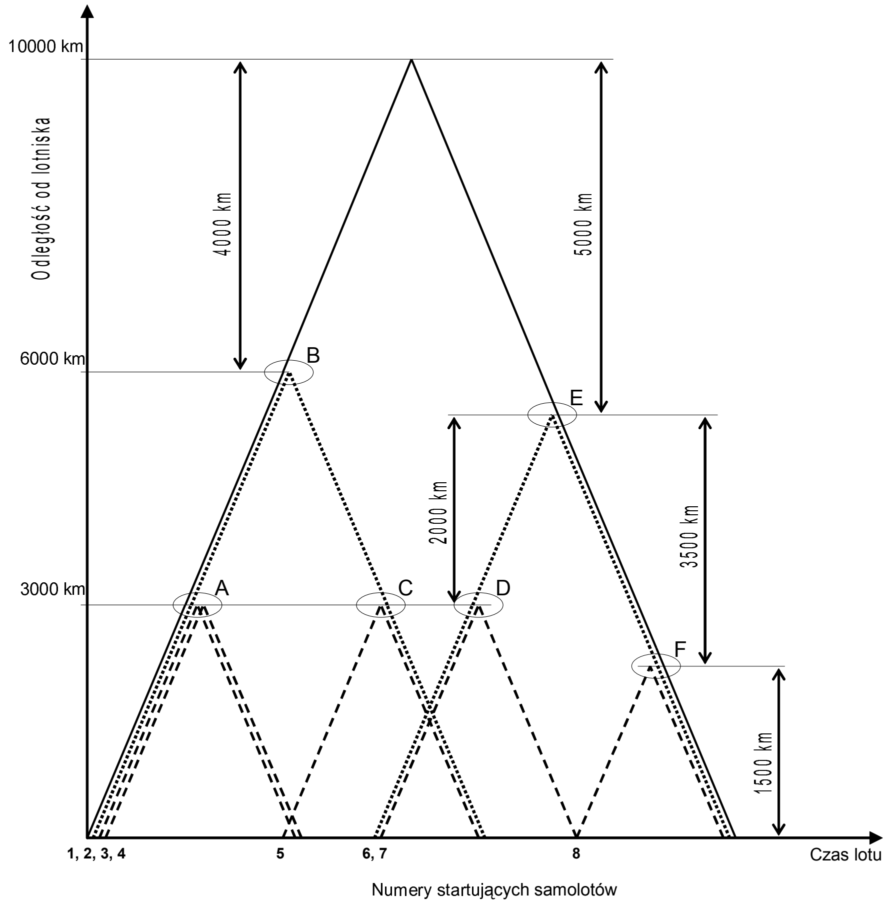
Tok rozumowania oraz schemat rozwiązania jest pokazywany na wykresie (czas lotu) – (odległość od miejsca startu). Nachylenie linii na tym wykresie jest miarą szybkości samolotów.

Ad.1 Pojedynczy samolot startując z pełnymi zbiornikami może dolecieć na odległość 4500 km (połowa zasięgu).



Ad.2 Aby zwiększyć odległość od lotniska należy wysłać dwa samoloty. Po pewnym czasie jeden z samolotów (2) „oddaje” część swojego paliwo pierwszemu samolotowi (1), tankując go do pełna. Samolot (2) wraca do bazy. Samolot (1) z pełnymi zbiornikami paliwa leci dalej 4500 km i wraca. W odpowiednim momencie z bazy startuje kolejny samolot (3) i leci na spotkanie pierwszego. W momencie spotkania samolot (1) ma puste zbiorniki, i musi otrzymać paliwo od (3), aby móc wrócić do bazy.
Jak łatwo policzyć samoloty (1) i (2) muszą dokonać operacji tankowania po przeleceniu 1/3 zasięgu. Również samolot (3) musi wystartować w takim momencie, aby spotkać się z samolotem (1) w odległości 1/3 zasięgu od bazy.

Przyjmując opisany wyżej schemat postępowania przebieg misji w ujęciu graficznym może wyglądać jak na rysunku:



Opis misji:

1. W chwili rozpoczęcia misji startują cztery samoloty: 1, 2, 3, 4;
2. Po pokonaniu 1/3 zasięgu pojedynczego samolotu 3000 km następuje tankowanie: dwa samolotu oddają część paliwa pozostałym dwóm (operacja A), dwa samoloty wracają do bazy;
3. Samoloty 1 i 2 z pełnymi zbiornikami lecą dalej do punktu odległego 6000 km od bazy, w którym następuje operacja tankowania B – zbiorniki paliwa samolotu 1 są uzupełniane do pełna, samolot 2 rozpoczyna lot powrotny;
4. W czasie trwania operacji tankowania B z bazy startuje samolot 5, którego celem jest dostarczenie paliwa wracającemu samolotowi 2 – operacja tankowania C;
5. Samolot **1** (główny samolot misji) po operacji tankowania B ma pełne zbiorniki paliwa, a więc może przelecieć 9000 km. Do celu ma 4000 km. Po wykonaniu zadania (pojawieniu się nad terytorium państwa „Y") rozpoczyna lot powrotny – może przelecieć jeszcze 5000 km;

6. Paliwo dla samolotu 1 jest dostarczane przez samoloty 6 i 7 startujące w takim momencie, aby po tankowaniu D samolot 6 spotkał się z samolotem 1 w odległości 4000 km od bazy – operacja tankowania E;

7. Ponieważ samolot 6 w punkcie D ma pełne zbiorniki paliwa, a do spotkania z 1 ma tylko 2000 km, wobec tego od tankowania E do kolejnego tankowania samoloty 1 i 6 mogą przelecieć jeszcze 3500 km ($2000 + 2 \times 3500 = 9000$ km, zasięg samolotu na pełnym zbiorniku);

8. W odległości 1500 km od bazy samolotom 1 i 6 zabrakłoby paliwa, wobec tego w odpowiednim momencie startuje samolot 8, który w czasie operacji tankowania F uzupełnia brakujące paliwo obu samolotom. Samolot 1 w towarzystwie 6 i 8 wraca do bazy.

Punkty czasowe (na podstawie analizy wykresu, odległości oraz szybkości lotu):

1. **Samolot 5** startuje w czasie operacji tankowania B, która ma miejsce po pokonaniu 6000 km, czyli po czasie 6000/800 =**7,5 godz.**

2. W punkcie E samolot 1 będzie po pokonaniu 15000 km, czyli po 18 godz. i 45 min. Do tego punktu samolot 6 ma 5000 km, co zajmie mu 6 godz. i 15 min. **Samoloty 6 i 7** muszą wystartować po czasie $18,75 - 6,25 = 12,5$ godz., czyli **12 godz. i 30 min** od początku operacji.

3. Analogicznie: w punkcie F, pokonaniu 18500 km samolot 1 (oraz 6) będzie po czasie 23 godz. i 7,5 min (23,125 godz.). Samolot z paliwem 8 ma do pokonania 1500 km, co zajmie im 1 godz. i 52,5 min. **Samolot 8** musi wystartować po czasie **21 godz. i 15 min** od początku operacji.

4. Całkowity czas operacji to **25 godz.**

Przy założeniu, że samolot musi przejść krótka obsługę po każdym locie, należy dysponować **8 samolotami**. Gdyby samoloty mogły startować od razu, po bardzo krótkim tankowaniu, wystarczyłoby tylko 5 samolotów (piaty samolot musi startować dokładnie w chwili lądowania 3 i 4, zamiast 6 i 7 można użyć 3 i 4, a zamiast 8 – 2 lub 5).

Ilość paliwa

Samolot tankuje: 9000 km/800 km/h $\times$ 1000 l/h = 11250 l paliwa.

W misji jest 8 startów samolotów z pełnymi zbiornikami. Zabierają więc **90 000 l paliwa**.

Jednakże samoloty 1, 6 i 8 (ostatni etap misji) nie zużywają całego paliwa. W odniesieniu do jednego samolotu ostatnia faza liczy $1500+3\times1500 = 6000$km, na co potrzeba 2/3 zbiornika paliwa.

Całkowite zapotrzebowania na paliwo wynosi $90000 - 1/3 \times 11250 =$ **86 250 l paliwa.**